



Cours de Mathématiques — Terminale Spécialité

Suites numériques : Récurrence, Limites et Convergence

Sept. 2026

1 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$).

Méthode — Principe de récurrence

La démonstration comporte obligatoirement 3 étapes rédactionnelles :

- 1. Initialisation :** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- 2. Hérédité :** On fixe un entier $k \geq n_0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (*hypothèse de récurrence*). On montre sous cette hypothèse que $P(k+1)$ est vraie.
- 3. Conclusion :** La propriété est initialisée et héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple rédigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Démonstration : Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2^{n+2} - 3$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(k)$ vraie, soit $u_k = 2^{k+2} - 3$.
Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^{(k+1)+2} - 3 = 2^{k+3} - 3$.

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+2} - 3) + 3 = 2^{k+3} - 6 + 3 = 2^{k+3} - 3$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** La propriété est initialisée et héréditaire. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Exercice d'application 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

2 Limites des suites

Définition — Limites finies et infinies

- **Limite finie** $l \in \mathbb{R}$: La suite (u_n) converge vers l ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$) si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
- **Limite infinie** $+\infty$: La suite (u_n) tend vers $+\infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$) si tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
- **Convergence / Divergence** : Une suite est **convergente** si elle admet une limite finie. Elle est **divergente** si sa limite est infinie ou s'il n'existe pas de limite.

Théorème — Limite d'une suite géométrique (q^n)

Soit $q \in \mathbb{R}$:

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

2.1 Formes indéterminées (F.I.) et techniques

Les 4 formes indéterminées sont : " $+\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Exemple rédigé

Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{4n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5n}$ (Factorisation par le terme dominant)

$$u_n = \frac{n^2 \left(4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{5}{n}\right)} = \frac{4 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par quotient des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{2} = 2$.

2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (Quantité conjuguée)

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exercice d'application 2

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

2. $b_n = n^2 - 5n + 2$

—

3 Théorèmes de comparaison et d'encadrement**Théorème — Théorème des Gendarmes**

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites. S'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$), alors la suite (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

Théorème — Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang :

— Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

— Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple rédigé

Déterminer la limite de $u_n = 3 + \frac{\sin(n)}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc :

$$3 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n+1}\right) = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n+1}\right) = 3$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Exercice d'application 3

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $x_n = 2^n + (-1)^n \sqrt{n}$

2. $y_n = \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2 + 1}$

—

4 Suites monotones et convergence

Définition — Vocabulaire

Soit (u_n) une suite numérique :

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n .
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout n .
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème — Théorème de la convergence monotone

1. Toute suite **croissante** et **majorée** est **convergente**.
2. Toute suite **décroissante** et **minorée** est **convergente**.

Théorème — Suites croissantes non majorées

Si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Méthode — Recherche de la limite : Équation du point fixe

Soit une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la fonction f est continue sur un intervalle (on verra la notion de continuité au chapitre suivant) I et si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in I$, alors la limite l vérifie l'équation :

$$l = f(l)$$

Exemple rédigé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et trouver sa limite l .

Résolution :

1. **Initialisation :** $u_0 = 0 \leq 3$ (Vrai).

Hérédité : Supposons $u_k \leq 3$. $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + 2 \leq \frac{1}{3}(3) + 2 = 1 + 2 = 3$. Héréditaire.

Conclusion : $u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(3 - u_n)$.

Puisque $u_n \leq 3$, $3 - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est croissante.

3. (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge vers une limite $l \leq 3$.

La fonction $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ est continue. Ainsi, $l = f(l) \iff l = \frac{1}{3}l + 2 \iff \frac{2}{3}l = 2 \iff l = 3$.

Exercice d'application 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite l .

—

Corrigés des exercices d'application

Exercice 1

1. Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 2 \in [0, 3]$. Hérédité : Si $0 \leq u_k \leq 3$, alors $6 \leq u_k + 6 \leq 9 \implies \sqrt{6} \leq \sqrt{u_k + 6} \leq \sqrt{9} \implies 0 \leq u_{k+1} \leq 3$. Par récurrence, $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .
2. Montrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$. Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{8} \approx 2,83$, donc $u_0 \leq u_1$. Hérédité : Si $u_k \leq u_{k+1}$, alors $u_k + 6 \leq u_{k+1} + 6 \implies \sqrt{u_k + 6} \leq \sqrt{u_{k+1} + 6} \implies u_{k+1} \leq u_{k+2}$. (u_n) est donc croissante.

Exercice 2

1. $a_n = \frac{3^n(1 - (2/3)^n)}{3^n(1 + (2/3)^n)} = \frac{1 - (2/3)^n}{1 + (2/3)^n}$. Comme $-1 < 2/3 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2/3)^n = 0$. Donc $\lim a_n = 1$.
2. $b_n = n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$. Comme $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = 1$, $\lim b_n = +\infty$.

Exercice 3

1. Pour tout n , $(-1)^n \geq -1$, donc $x_n \geq 2^n - \sqrt{n} = 2^n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)$. Par croissance comparée, $\lim \frac{\sqrt{n}}{2^n} = 0$, donc $\lim(2^n - \sqrt{n}) = +\infty$. Par comparaison, $\lim x_n = +\infty$.
2. $|y_n| = \frac{|(-1)^n \cos(n)|}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$. Comme $\lim \frac{1}{n^2 + 1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim y_n = 0$.

Exercice 4

1. $u_0 = 1 > 0$. Si $u_k > 0$, alors $1 + u_k > 0$ donc $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} > 0$. Donc $u_n > 0$ pour tout n .
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$ car $u_n > 0$. La suite est strictement décroissante.
3. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $l \geq 0$. l résout $l = \frac{l}{1+l} \iff l(1+l) = l \iff l^2 = 0 \iff l = 0$.